

### A.18

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sin x - 1 \\ F(0) &= 0 + \sin 0 - 1 = -1 \rightarrow \text{negativ} \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{positiv} \end{aligned}$$

- $f(x) = x$  ist streng monoton steigend in  $[0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x) = \sin x$  ist monoton steigend in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (Siehe Skript S.49)
- $h(x) = -1$  ist konstant in  $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow F(x) = f(x) + g(x) + h(x)$  steigt streng monoton in  $[0, \frac{\pi}{2}]$   
 $\Rightarrow F(x)$  hat nur eine Nullstelle im Intervall (Zwischenwertsatz)

### A.19

a) Für  $h \in (0, \frac{\pi}{2})$  und  $x \in (0, \pi)$ :

$$\begin{aligned} \cos x + h - \cos x - h &= (\cos x \cos h - \sin x \sin h) - (\underbrace{\cos x \cos(-h)}_{\cos h} - \underbrace{\sin x \sin(-h)}_{-\sin h}) = \\ &= \cos x \cos h - \cos x \cos h - \sin x \sin h - \sin x \sin h = \\ &= -2 \underbrace{\sin x}_{>0} \underbrace{\sin h}_{>0} < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend (streng)} \end{aligned}$$

b)  $\cos [0, \pi] = [\cos 0, \cos \pi] (= [1, -1]) = [-1, 1]$  Alles dazwischen wird durchlaufen, da stetig und monoton.

c)  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \Rightarrow \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

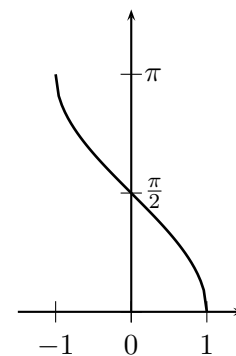


Abbildung 1: Arkuscosinus

### A.20

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}$$

a) Für  $D_a = [\frac{1}{2}, \infty]$

Bei einem festem  $x$  ist  $\frac{1}{x}$  konstant und  $\frac{1}{n}$  eine Nullfolge

$$\Rightarrow f(x) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$\Rightarrow$  Punktweise konvergenz

$$h(x) = \frac{1}{x}, h\left(\frac{1}{2}, \infty\right) = (0, 2)$$

$$\begin{aligned} f_n(x) = \frac{1}{nx} &\leq \frac{1}{n} \cdot 2 < \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \frac{\varepsilon}{2} \\ n &> \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \lceil n \rceil = \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil \end{aligned}$$

b) Für  $D_b = [0, \infty]$

Bei einem festem  $x$  ist  $\frac{1}{x}$  konstant und  $\frac{1}{n}$  eine Nullfolge

$$\Rightarrow f(x) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$\Rightarrow$  Punktweise Konvergenz ( Selbe Begründung wie bei a )

$h(x) = \frac{1}{x}, h(0, \infty) = (0, \infty)$  Da der Faktor der von  $x$  abhängt unendlich groß werden kann, kann man kein von  $x$  unabhängiges  $n_0$  wählen, sodass der Wert kleiner als  $\varepsilon$  wird.

$\Rightarrow$  Keine gleichmäßige Konvergenz.